

DEMシミュレーションを用いた粉体混合メカニズム 解析と混合装置設計に関する研究

著者	山本 通典
学位授与機関	Tohoku University
学位授与番号	11301甲第17107号
URL	http://hdl.handle.net/10097/64072

Ph. D. Thesis

Graduate School of Environmental Studies, Tohoku University

DEM シミュレーションを用いた粉体混合
メカニズム解析と混合装置設計に関する研究

要約

2016年3月

山本 通典

1.1 背景

粉体を原料とした工業プロセスでは、粉碎、造粒、乾式または湿式混合、コーティングなど様々な操作が行われている。中でも乾式混合は製品性能を左右する重要な単位操作の一つである。混合の目的は粒子径、粒子密度、粒子形状などの特性が異なる複数の原料を同時に、かつ均一に分散・分配させることにある。生産プロセスの上流では、それ以降の操作に影響を及ぼさない程度に混合させる必要があり、また下流においては所望の製品特性を得るために必要な混合状態を得なければならない。そのため、求められる混合状態は対象とする製品はもちろんその前後のプロセスによって異なることから、多種多様な混合装置が使用されている。**Fig.1.1** と **Fig1.2** には工業プロセスに使用されている代表的な混合装置と、これら混合機の分類およびその適用範囲を示している¹⁾。混合装置は混合機構によって大きく容器回転式、機械攪拌式、流動攪拌式、無攪拌式に分類され、それぞれに異なる特徴を有している²⁾。容器回転式の混合機では原料が投入される容器そのものが回転し混合処理が行われる。投入率に最適範囲がある²⁾ことから容器全容量に対し原料を処理することはできないものの、装置構造がシンプルでメンテナンスがしやすく、原料へのダメージが低いことや原料の完全排出が可能などのメリットがあることから、工業プロセスでも広く使用されている装置の一つである。粉体原料としては流動性が良く、物性の差が少ないものが対象となる。機械攪拌式の混合機は容器内に設置された攪拌羽根が回転し原料を混合する機構となっている。攪拌羽根による強制せん断と循環流れにより混合を進行させるため、流動性が低い付着性粉体原料にも対応でき、回転速度は容器回転式に比べ高速まで適用できるといった特徴を有している。容器回転式と同様、混合に適した原料の投入量があり、また高いせん断が発生するため装置の摩耗やコンタミネーションにも注意が必要となる。流動攪拌式の混合機は、気流による循環対流によって原料を混合する機構となっている。流動化による粘性効果と速度差によるせん断効果に加え、浮遊状態でのランダム運動により拡散による分散も発現される。気流によって原料を混合するため、基本的には付着性が少なく流動性のよい粉体原料の混合に使用される。

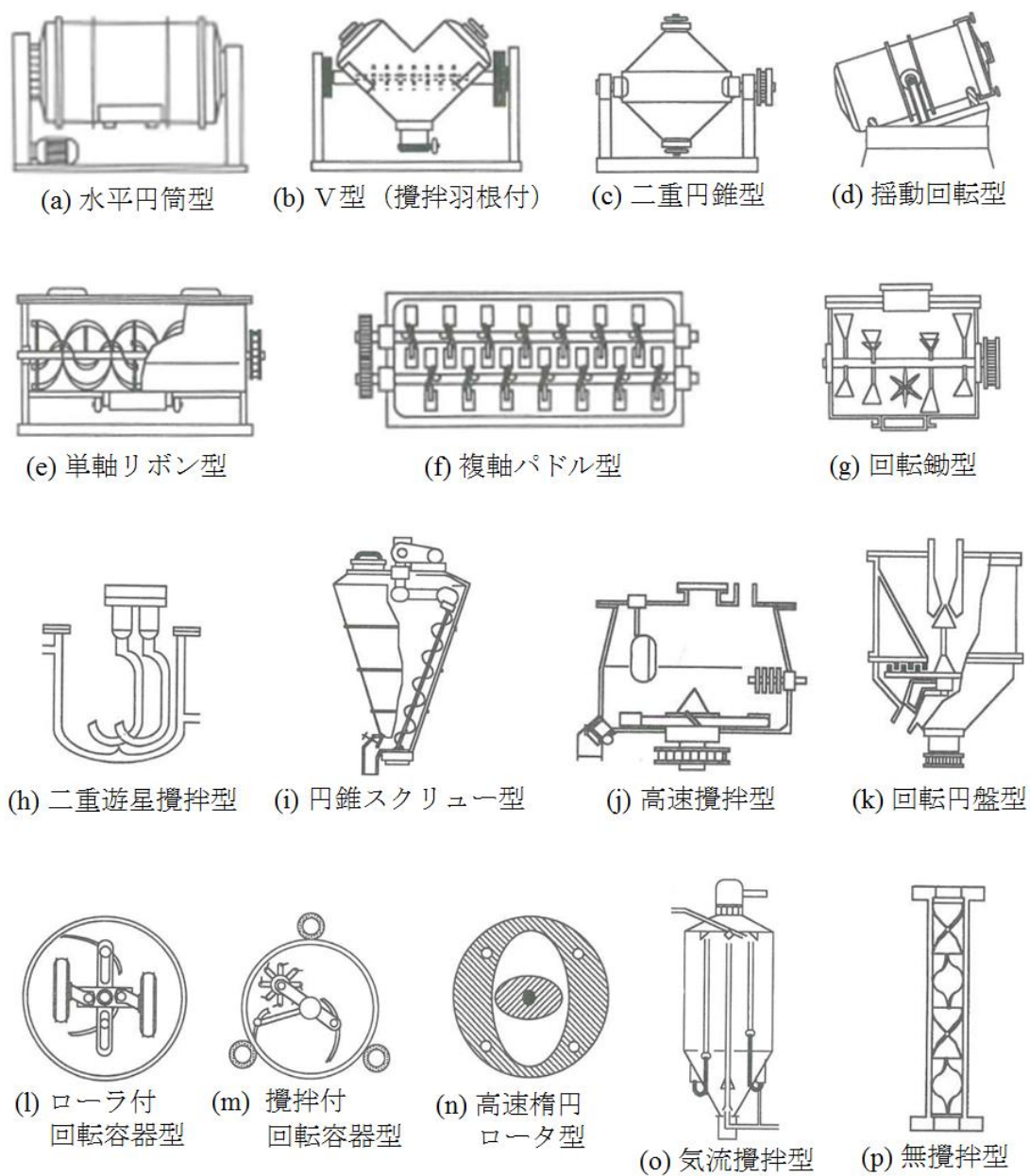


Fig.1.1 Schematic diagram of powder mixers¹⁾.

対象物の主な性状 (分類) (混合機形式)		回 分 式	連 続 式	粒径範囲[mm]				流動性				安息角度		物性差		摩擦性 大	含水率		混合機能分類
				1.0 以上	0.1 ~ 1.0	0.01 ~ 0.1	数 μ 以下	大 35 以下	中 35 ~ 45	小 45 以上	粘 着 性 大	小	大	小	大		乾 燥	湿 潤	
容器回転式	水平円筒	○	○	○	○	△		○	△					○		○	○		I
	傾斜円筒	○		○	○	△		○	△					○		○	○		
	V 型	○		○	○	△		○	△					○		○	○		
	二重円錐	○		○	○	△		○	△					○		○	○		
	連続V型	○	○	○	○	△		○	△					○		○	○		
容器回転式 (攪拌羽根 内蔵)	水平円筒	○	○	○	○	○		○	○	△				○	△		○	△	II
	傾斜円筒	○		○	○	○		○	○	△				○	△		○	△	
	V 型	○		○	○	○		○	○	△				○	△		○	△	
	二重円錐	○		○	○	○		○	○	△				○	△		○	△	
機械攪拌式 (回転軸 水平)	リボン	○	○	○	○	○	△	○	○		△			○			○	△	I
	スクリュー	○	○	○	○	○	△	○	○		△			○			○	△	
	ロッドまたはピン	○	○	○	○	○	△	○	○	○	○	○	○	○	○		○	○	
	複軸パドル	○	○	○	○	○	△	○	○	○	○	○	○	○	○		○	○	II
機械攪拌式 (回転軸 垂直)	リボン	○		○	○	○	△	○	○	○				○	△		○	△	I
	スクリュー	○		○	○	○	△	○	○	○				○	△		○	△	
	円錐形スクレーパー	○		○	○	○	△	○	○	○				○	△		○	△	
	高速流動	○		○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○		○	○	II
	回転円板		○	○	○	△		○	○	△				○			○		I
	マラー		○	○	○	○		○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	II
流動攪拌式	流動層	○		△	○	○	△	○	○					○			○	○	I
	旋回流動	○		○	○	○		○	○	△				○			○	○	
	ジェットポンプ	○		○	○	○		○	○	○				○			○	○	
無攪拌式			○	○	○			○						○			○	○	I
高速せん断、衝撃式		○	○		△	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	II

○：適用，△：物性，機械特性により適用

混合機分類：微粉の分散による分類

I：対流混合（全体混合） II：せん断混合（凝集塊の分散）

III：高速せん断，衝撃（微粉の分散，複合化）

Fig.1.2 Classification and range of application for powder mixers¹⁾.

無攪拌式では円筒状の容器内に羽根が設置され，そこを粉体原料が通過すると原料の分割と合一，対流により混合が進行する．密閉構造のインラインミキサ

一として使用できるメリットがあるが、定量での供給と排出機構が必要となるだけでなく、付着性・圧縮個結性の粉体を使用すると閉塞が生じるため注意が必要である。そのため、物性差が小さく流動性の良い粉体原料の混合に適している。高速せん断、衝撃式混合機は高速で回転する羽根や摩砕翼により微粒子が分散する混合機構を有している。凝集体の解砕も生じるため、1次粒子の精密微細混合も進行する。そのため、緩やかではあるが粉砕を伴ったミクロスケールの混合や複合化が促進される。

Fig.1.3 には各混合装置における混合時間と混合・分散到達度の関係を示す。ここで、混合・分散到達度³⁾は 0.0 から 1.0 までの値をとり、その値が 1 に近づくにつれ混合状態が均一であることを示している。ここでは装置の特徴に関する位置づけを調べるのが目的であるため、共通試験用の原料が使用されており、炭酸カルシウム（白色、平均粒子径 $2.38\mu\text{m}$ ）と酸化鉄（暗赤色、平均粒子径 $0.21\mu\text{m}$ ）が質量基準で 95:5 の比率で投入される⁴⁾。混合の進行に伴って酸化鉄の凝集塊が解砕・分散される過程を混合物の明度値の変化として測定され、以下の式から混合・分散到達度が算出される。

$$\eta = \frac{(L_0 - L)}{(L_0 - L_{std})} \quad (1.1)$$

ここで、 L は各混合時間における混合物サンプルの明度値、 L_0 は炭酸カルシウムの明度値、 L_{std} は 5%の酸化鉄を完全に炭酸カルシウム粉体中に分散させた混合物の明度値を示している。

機械攪拌式における混合度の時間変化を見ると、他の混合装置に比べ混合速度が速く、最終的には混合度が 1.0 に到達し混合状態はほぼ均一になっている。機械攪拌式では設置された羽根の回転により高いせん断力が生じ、それを利用して混合が進行することから短時間で均一な混合状態が得られている。一方、容器回転式のような対流混合を特徴とする混合機では、せん断力が低いため混合の進行速度が遅く、また最終的に完全混合には到達しない。このように混合装置はその機構によって処理速度や混合状態の最終到達度が異なるが、装置の優劣を示しているわけではないことに注意が必要である。

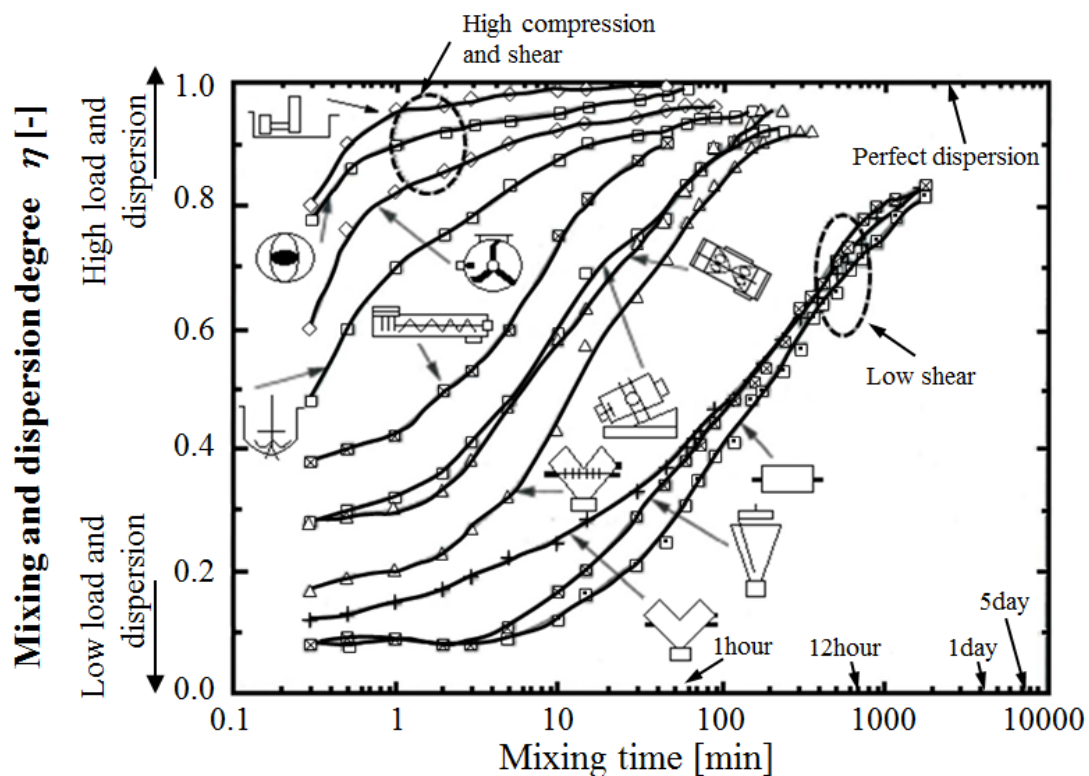


Fig.1.3 Mixing degree as a function of mixing time for each powder mixers¹⁾.

このように非常に数多くの、様々な特徴を有する混合機から対象としている生産プロセスや原料に適した装置を選定するには多くの試験を行う必要がある。これが試作の段階ならそれほど問題にはならないが、量産機選定の試験となるとコストと時間が大きな問題となる。コストの具体的な内訳には装置メーカーでのテスト費や原料費、人件費などがあり、これが試験の回数分必要となる。1つの装置について試験がうまくいかなければ、別の装置で同様の検証を行うためさらにコストがかかる。時間については装置選定がうまくいくまで実施されるため時間がかかることもさることながら、量産までのスケジュールが組みにくい点もまた問題となっている。また、既に量産プロセスに使用されている混合装置についても製品の改良などにより従来通りの混合状態を得られなくなるといった問題も生じている。これは製品改良に伴い粉体原料の特性が変化したことが起因している。このようなケースでは、改良前の製品も同様のプロセ

スで生産されることが多いため全く異なる混合装置を導入することは少ない。そのため、操作条件の変更や装置の改良などで対処することになるが、この場合においても担当者の勘と経験に依存した試行錯誤が行われるため⁵⁾、膨大なコストや時間を要することとなる。

1.2 粉体混合における課題

既述のように粉体混合装置の選定や改良には問題があることを述べたが、ここで **Fig.1.4** に示す機械攪拌式的高速粉体混合機を問題の 1 例として示す。この装置は容器底面に設置されたくさび形の攪拌羽根が **Fig.1.4** に示す矢印の方向に回転することで投入された原料を混合する機構となっている。この装置を用いて異なる粒度分布をもつ平均粒子径 $10\mu\text{m}$ の有機物と平均粒子径 $50\mu\text{m}$ の無機物を混合した際に混合不良が発生した。混合状態を分析した結果、容器中心付近に有機物が、容器壁面付近に無機物が多く存在していることが分かった。この混合不良を改善するためには既述の通り、原料に適した混合機を選ぶか、混合機の操作条件変更や装置改造が対策として挙げられる。ここでは後者で対応することになり、まずは操作条件として回転速度や混合時間、原料の投入量などを変更して実験を繰り返したものの混合状態は改善されなかった。そのため混合装置を改造することになったが、容器を含めた大がかりな改造は構造上難しいことから羽根の形状を変更することとした。しかし、羽根の形状を変更するといっても混合不良の原因が明確になっておらず、そのため設計の指針が全くない状態であることから、問題を解決するためにはまず混合メカニズムに関する十分な知見が必要である。そこで粉体混合に関する既往の研究について調査した。

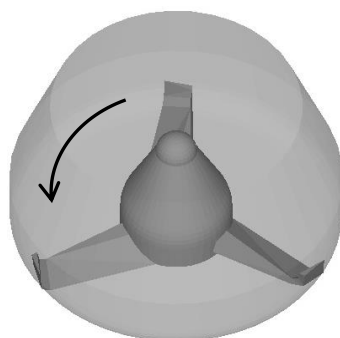


Fig.1.4 Schematic diagram of high speed mixer.

1.3 粉体混合に関する既往の研究

混合は食品や化学工業、医療など様々な産業プロセスに適用されており、我々の生活を支える重要な操作であることから、これまでに非常に多くの研究が行われている。混合は粉体原料の特性⁶⁾に加え、混合装置の構造⁷⁾やその操作条件⁸⁾にも影響を受けることが知られていることから、それぞれの影響に関する研究は勿論だが、生産プロセスでは混合状態をどのように評価するか、その手法についても課題を抱えており、その点についても多くの研究が今もなお進められている⁹⁻¹²⁾。

混合に影響を及ぼす粉体特性として最も知られているのが粒子径分布であるが、その他にも粒子密度（個々の粒子の質量差）や粒子形状、摩擦係数、液架橋力や静電気力のような粒子間相互作用といった要因が知られている。一方、混合装置の操作条件では、回転速度（容器回転式の場合は容器の回転速度、機械攪拌式の場合は羽根の回転速度）や原料の投入量、混合時間などが影響する。これらは混合装置によってもその影響の度合いが変わるため、それら全てを研究することは容易ではなく、今日においても体系的な理論の構築はおろか個々の要因全てを調べられているわけではない。

これまでの研究では回転ドラムを対象とした研究が広く進められており、その理由としては混合装置としては最も一般的であり、かつ実験のしやすさなどが挙げられる。Nityanand ら¹³⁾は回転ドラムを対象に、材料種は同一だが粒子径が異なる 2 種類の原料を混合した際の混合挙動に関する実験結果を報告している。回転速度が低速の条件下では粒子径が小さい粒子が粒子層の中心に集まり、その周囲を粒子径の大きな粒子が取り囲むような混合状態となる。しかし、回転速度が高くなると混合状態が変化し、その現象は **Eq.(1.2)** で定義される臨界回転速度 N_c の付近から発生することを報告している。

$$N_c = \frac{60}{\pi} \sqrt{\frac{g}{2D_m}} \quad (1.2)$$

ここで、 D_m は回転ドラムの容器内径、 g は重力加速度である。**Fig.1.5** には回転速度の変化に伴う粒子運動の概略を示している。**Fig.1.5(a)** に示すように回転速度が低速の領域では、回転ドラム内の粒子はおおよそ一定の安息角を形成しカスケード領域において混合が進行する¹⁴⁾。回転速度がここから増加すると

Fig.1.5(b)のように遠心力の影響を受け粒子はより高く持ち上げられた後に落下し、明確な安息角が見られなくなる。さらに臨界回転速度を越えると粒子は遠心力の影響をより強く受けて Fig.1.5(c)のように容器壁面に密着し、混合はほとんど進行しなくなる。この条件下では遠心力が支配的となるため混合状態は大粒子ほど容器壁面に集まると思われるが、Nityanand らの実験では粒子径が小さい粒子ほど容器壁面に集まる結果となっている。また、同一の粒子径を持つ密度の異なる 2 種の粒子混合挙動についても Ristow らが実験による観察結果を報告しており¹⁵⁾、密度が高い粒子ほど粒子層の中心に集まる結果を示している。この実験における回転速度は Fig.1.5(a)のような低速領域であるものの、遠心力の観点から密度が高い粒子が粒子層の周囲を囲う混合状態を予想してしまうが、これとは異なる混合状態となっている。一方、摩擦係数や粒子形状の影響についても実験による研究結果が報告されている。Aissa ら¹⁶⁾は密度、摩擦係数、粒子形状が混合に及ぼす影響を実験によって解析している。この結果、回転速度と容器径で定義されるフルード数だけで混合を特徴づけることは難しく、また最適な充填量は粒子密度や摩擦係数、形状といった粉体特性に依存することを示している。この他にもいくつかの論文が報告されているが¹⁷⁻²⁰⁾、摩擦係数や粒子形状の影響を調べるために粒子種を変えたとしても、通常はそれに伴い粒子径分布なども変化することから個々の影響だけを抽出し解析することが極めて難しい。また液架橋力や静電気力といった粒子間の付着性に関わる影響については実験も非常に難しいことから、付着性が低い原料に比べ報告されている研究事例は少ない²¹⁾。以上のことから回転ドラムに関し粉体特性や粒子間相互作用が混合に及ぼす影響について十分に解明されていないのが現状である。このような状況は回転ドラムに限らず、V ブレンダー^{22,23)}などの容器回転式だけではなく、リボンミキサー^{24,25)}やブレードミキサー^{26,27)}といった機械攪拌式の混合装置についても同様である。

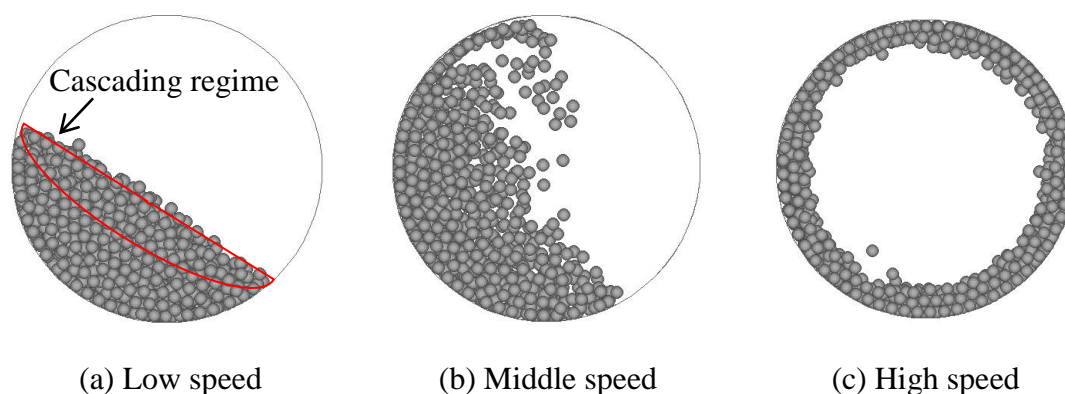


Fig.1.5 Particles motion for each rotational speed.

1.4 粉体混合におけるシミュレーションの活用

近年のコンピュータの性能の発展に伴い，コンピュータの演算能力を利用した数値シミュレーションが航空工学，土木工学，化学工学，原子力工学などの様々な分野で有力な解析ツールとして活用されている²⁸⁻³⁰⁾．粉体プロセスにおいてもその技術を適用し，産業利用に応用する動きが出てきている．

個々の粒子の衝突や摩擦が運動を支配する粉粒体の運動挙動は本質的に不連続な現象であり，3個以上の粒子の衝突を含む運動挙動に対しては一般的な解が存在しない．そのため，粉粒体の運動を解析するためにはシミュレーションモデルが必要になる．粉粒体の運動挙動をシミュレートする方法として提案されている代表的なものとしては，有限体積法^{31, 32)}，有限要素法^{33, 34)}，オートマトン³⁵⁾などがあるが，現在最も広く用いられている手法は，離散要素法(Distinct Element Method: DEM)である．DEMは1970年代にCundallら³⁶⁾が開発した解析手法である．DEMでは個々の粒子に作用する接触力をモデル化し，全ての粒子に対する運動方程式を解くことで粒子全体の挙動を求める手法である．粉体プロセスでは，粉碎³⁷⁾，混合³⁸⁾，造粒³⁹⁾，分散⁴⁰⁾，充填⁴¹⁾，堆積⁴²⁾などに適用例があり，中でも粉体混合との相性は良いと言われている．DEMシミュレーションの代表的な利点として以下の4点が挙げられる．

- (1) 個々の粒子の詳細な挙動を追跡可能
- (2) 個々の粒子の物理量を定量的に評価可能
- (3) 特定の物性値を抽出し，その影響を解析可能
- (4) 装置形状や操作条件を変更した数値実験による実験量の低減が可能

(1)に関しては、混合装置の容器が透明である場合、もしくは容器に覗き窓が設置されている場合には粒子群の表層のみを観察することができる。そのため、観察可能な粒子は粒子群全体の限られた一部の領域であり、実際に使用されている装置は一般的に透明ではない。そのため粉体混合に重要な粒子挙動をシミュレーションによって可視化することは、現象を理解する上で非常に重要となる。(2)においては、粒子速度や粒子に作用する力など実験では計測が難しい物理量を定量的に評価できるため、現象のメカニズム解析や理論構築に役立てることができる。(3)では、シミュレーションでは密度や粒子径分布、摩擦係数といった粉体特性に対し、任意の値を設定した解析を行うことができるため、実験では困難な各特性の影響をそれぞれ分析することが可能である。(4)ではシミュレーション上において装置形状や操作条件を変更することができるため、装置選定や操作条件の最適化などを短期間で実施することができ、検討の高効率化が可能となる。以上のように、DEM シミュレーションは多くのメリットをもたらしてくれることから、これまでに数多くの研究が報告されている。Bhattacharya ら⁴³⁾は回転ドラムにおいて生じた混合不良である偏析を改善するため、容器中心に設置するプレート形状を DEM シミュレーションで設計している。DEM シミュレーションにおいて複数のプレート形状やその配置、枚数について検討し、実験と DEM シミュレーションの比較からシミュレーションの妥当性を評価するとともに、偏析の対策を効率的に実施できることを示している。Manickam ら⁴⁴⁾は回転軸を 2 本有する W コーン型混合機について、粒子の初期配置、粒子径、粒子充填量、回転速度が混合に及ぼす影響を実験と DEM シミュレーションを用いて解析している。通常の W コーン型混合機は回転軸が 1 本であるが、回転軸を 2 本とすることで粒子径、粒子充填量の影響を受けずに混合を促進させることが可能であることを示し、複雑な運動をする混合機にも DEM シミュレーションが適用できることを示唆している。また、Sarkar ら⁴⁵⁾は回転軸が水平に設置されている機械攪拌式連続混合機について、DEM シミュレーションを用いた粒子充填量、羽根の回転速度が混合に及ぼす影響を解析している。実験では計測することが難しい粉体層内部の速度分布や、個々の粒子の速度ベクトルなどを解析することで、充填量が高い場合は羽根の回転速度を低くし、充填量が低い場合は回転速度を高くすると混合状態が均一になる傾向があるこ

とを示している．さらに，比較的研究が進んでいない粒子間の付着性の影響についても，DEM シミュレーションを用いた解析結果が報告されてきている．Liu ら⁴⁶⁾は液架橋力が存在する条件下において，回転速度と粒子充填量が混合に及ぼす影響を DEM シミュレーションによって解析している．シミュレーションの結果，液体が存在することで容器壁面での混合が促進され，数回転で混合状態が均一になることを確認している．この傾向は，粒充填量が高くなっても変わらず，液体存在下では混合が促進されることを示している．

しかしながら，上述のような既往の研究において得られている知見は DEM シミュレーションが実際の混合状態を再現できるという点にとどまっており，偏析を改善するために必要な混合メカニズムはまだ明確になっていないことから，装置選定方法や装置改良といった偏析改善の方策についても具体的な手法が確立されていない．そのため実現現象を再現可能な DEM シミュレーションをさらに発展させ混合メカニズムを明らかにし，装置選定や装置設計技術を確立することで高速粉体混合機での偏析改善が可能になると思われる．そこで本論文を通して中心的に用いられている DEM について，次節からその詳細を述べる．

1.4.1 離散要素法 (Distinct Element Method: DEM) シミュレーション^{47, 48)}

DEM では互いに接触した粒子間に働く弾性反発力や摩擦力などの接触力をモデル化し，個々の粒子に対する運動方程式から粒子の速度と中心座標を時間ステップごとに数値的に解析する手法である．**Fig.1.6** に接触力の計算モデルを示す．ここで法線方向にはバネとダッシュポット，接線方向にはそれらに加え，摩擦力を表す摩擦スライダーが挿入されている．

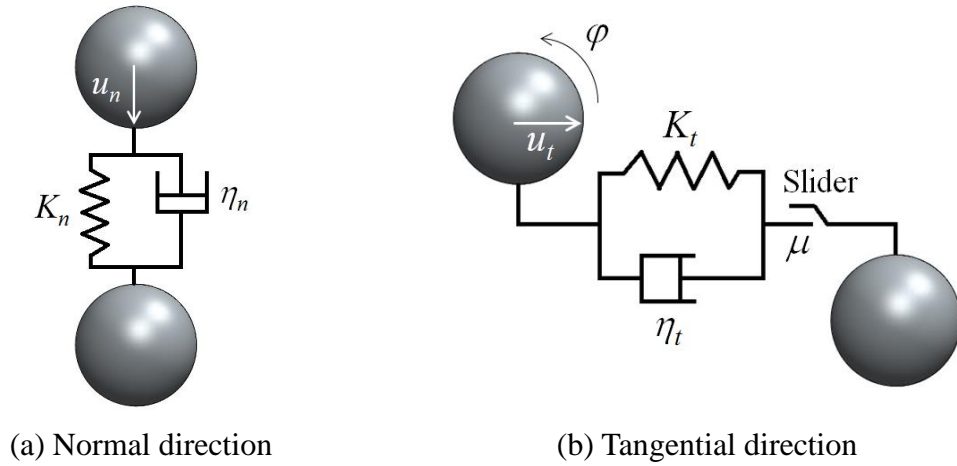


Fig.1.6 Simulation model of interactive forces between two particles.

まず, **Fig.1.7** に示すように半径 r の異なる粒子 i と j が近接している状態を考えると, 2 粒子の中心座標間距離から **Eq.(1.3)**を用いて接触判定される.

$$r_i + r_j \geq r_{ij}, \quad r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2} \quad (1.3)$$

この 2 つの粒子が接触条件を満たした場合は **Fig.1.6** のモデルを用い接触力を計算するが, そのためにまずは法線方向と接線方向の相対変位を求める必要がある. そこで, X , Y , Z 軸回りの各粒子の相対変位を Δu_x , Δu_y , Δu_z , また X , Y , Z 軸回りの各粒子の回轉變位の和を φ_x , φ_y , φ_z とし, 相対変位の各成分を **Eq.(1.4)** から求める.

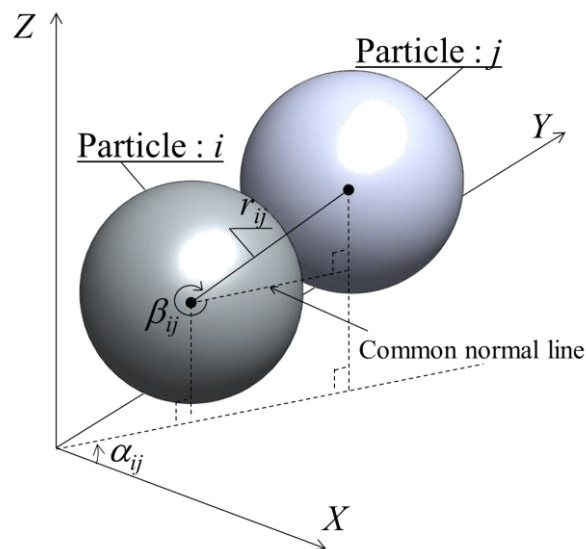


Fig.1.7 Contact of two particles.

$$\begin{pmatrix} \Delta u_n \\ \Delta u_{sy} \\ \Delta u_{sz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta_{ij} & 0 & -\sin \beta_{ij} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta_{ij} & 0 & \cos \beta_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha_{ij} & \sin \alpha_{ij} & 0 \\ -\sin \alpha_{ij} & \cos \alpha_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u_x \\ \Delta u_y \\ \Delta u_z \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

$$+ r \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \cos \alpha_{ij} \sin \beta_{ij} & \sin \alpha_{ij} \sin \beta_{ij} & \cos \beta_{ij} \\ \sin \alpha_{ij} & -\cos \alpha_{ij} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{pmatrix}$$

ここで、 α_{ij} は接触する2個の粒子の共通法線のXY平面への投影線がX軸となす角、 β_{ij} は共通法線がXY平面となす角を示している (Fig.1.7). よって、各方向の相対変位から弾性抗力の増分 Δe と粘性抗力の増分 Δd が次式から求められる.

$$\Delta e_n = K_n \Delta u_n \quad (1.5)$$

$$\Delta e_{sy} = K_s \Delta u_{sy} \quad (1.6)$$

$$\Delta e_{sz} = K_s \Delta u_{sz} \quad (1.7)$$

$$\Delta d_n = \eta_n \frac{\Delta u_n}{\Delta t} \quad (1.8)$$

$$\Delta d_{sy} = \eta_s \frac{\Delta u_{sy}}{\Delta t} \quad (1.9)$$

$$\Delta d_{sz} = \eta_s \frac{\Delta u_{sz}}{\Delta t} \quad (1.10)$$

したがって、時刻 t における弾性抗力 $[e]_t$ と粘性抗力 $[d]_t$ は、導出した各成分の増分を用いて次式のように求められる.

$$[e]_t = [e]_{t-\Delta t} + \Delta e \quad (1.11)$$

$$[d]_t = \Delta d \quad (1.12)$$

これを時間増分で差分近似し、弾性抗力と粘性抗力をそれぞれ加算することにより、時刻 t における法線方向圧縮力 $[f_n]_t$ と接線方向せん断力 $[f_{sy}]_t$, $[f_{sz}]_t$ が次式から求められる.

$$[f_n]_t = [e_n]_t + [d_n]_t \quad (1.13)$$

$$[f_{sy}]_t = [e_{sy}]_t + [d_{sy}]_t \quad (1.14)$$

$$[f_{sz}]_t = [e_{sz}]_t + [d_{sz}]_t \quad (1.15)$$

ここで、2つの粒子が接触していない場合には接触力は働かないので、粒子間に引っ張り力が作用しないように **Eq.(1.16)**に示す条件を法線方向圧縮力 $[f_n]_t$ に与える。また、接線方向せん断力 $[f_s]_t$ には粒子間の摩擦係数 μ を考慮して、**Eq.(1.17)**に示す条件を加える。

$$r_i + r_j < r_{ij}, \quad [f_n]_t = 0 \quad (1.16)$$

$$|[f_s]_t| < \mu [f_n]_t, \quad [f_s]_t = \sqrt{[f_{sy}]_t^2 + [f_{sz}]_t^2} \quad (1.17)$$

以上より求められた時刻 t における $[f_n]_t$, $[f_{sy}]_t$, $[f_{sz}]_t$ から、その X , Y , Z 成分 $[f_x]_t$, $[f_y]_t$, $[f_z]_t$ は **Eq.(1.18)**で与えられる。また、接線方向せん断力により生じる X , Y , Z 軸回りのモーメント $[M_x]_t$, $[M_y]_t$, $[M_z]_t$ は **Eq.(1.19)**で与えられる。

$$\begin{pmatrix} [f_x]_t \\ [f_y]_t \\ [f_z]_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_{ij} & -\sin \alpha_{ij} & 0 \\ \sin \alpha_{ij} & \cos \alpha_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta_{ij} & 0 & \sin \beta_{ij} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta_{ij} & 0 & \cos \beta_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [f_n]_t \\ [f_{sy}]_t \\ [f_{sz}]_t \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

$$\begin{pmatrix} [M_x]_t \\ [M_y]_t \\ [M_z]_t \end{pmatrix} = -r \begin{pmatrix} 0 & \cos \alpha_{ij} \sin \beta_{ij} & \sin \alpha_{ij} \\ 0 & \sin \alpha_{ij} \cos \beta_{ij} & \cos \alpha_{ij} \\ 0 & \cos \beta_{ij} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [f_n]_t \\ [f_{sy}]_t \\ [f_{sz}]_t \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

ここで、回転方向では粒子間の転がり摩擦係数を考慮するため、**Eq.(1.20)**に示す回転抵抗を与える。

$$R_r = -\mu_r b |f_n| \frac{\varphi}{|\varphi|} \quad (1.20)$$

ここで、 μ_r は転がり摩擦係数、 b は粒子の接触面の半径を示す。以上のように、接触力 $[f_x]_t$, $[f_y]_t$, $[f_z]_t$ とモーメント $[M_x]_t$, $[M_y]_t$, $[M_z]_t$ を粒子 i に接触する全ての粒子についても同様に求めることで、粒子 i に作用する接触力の X , Y , Z 方向の分力 F_{xi} , F_{yi} , F_{zi} と、 X , Y , Z 軸回りのモーメント M_{xi} , M_{yi} , M_{zi} の総和が次式によって表わされる。

$$[F_{xi}]_t = \sum_j [f_x]_t \quad (1.21)$$

$$[F_{yi}]_t = \sum_j [f_y]_t \quad (1.22)$$

$$[F_{zi}]_t = \sum_j [f_z]_t - mg \quad (1.23)$$

$$[M_{xi}]_t = \sum_j [M_x + R_r]_t \quad (1.24)$$

$$[M_{yi}]_t = \sum_j [M_y + R_r]_t \quad (1.25)$$

$$[M_{zi}]_t = \sum_j [M_z + R_r]_t \quad (1.26)$$

したがって、時刻 t における並進と回転の加速度は運動方程式から次式のように表される．

$$\left[\frac{d^2 u_{xi}}{dt^2} \right]_t = \frac{[F_{xi}]_t}{m_{Bi}} \quad (1.27)$$

$$\left[\frac{d^2 u_{yi}}{dt^2} \right]_t = \frac{[F_{yi}]_t}{m_{Bi}} \quad (1.28)$$

$$\left[\frac{d^2 u_{zi}}{dt^2} \right]_t = \frac{[F_{zi}]_t}{m_{Bi}} \quad (1.29)$$

$$\left[\frac{d^2 \phi_{xi}}{dt^2} \right]_t = \frac{[M_{xi}]_t}{I_t} \quad (1.30)$$

$$\left[\frac{d^2 \phi_{yi}}{dt^2} \right]_t = \frac{[M_{yi}]_t}{I_t} \quad (1.31)$$

$$\left[\frac{d^2 \phi_{zi}}{dt^2} \right]_t = \frac{[M_{zi}]_t}{I_t} \quad (1.32)$$

ここで、 m_b は粒子の質量、 I は粒子の慣性モーメントを示している．上式を時間増分 Δt に関して積分すると、時刻 t における並進と回転の変位速度が以下の式から求められる．

$$\left[\frac{du_{xi}}{dt} \right]_t = \left[\frac{du_{xi}}{dt} \right]_{t-\Delta t} + \left[\frac{du_{xi}}{dt} \right]_t \Delta t \quad (1.35)$$

$$\left[\frac{du_{yi}}{dt} \right]_t = \left[\frac{du_{yi}}{dt} \right]_{t-\Delta t} + \left[\frac{du_{yi}}{dt} \right]_t \Delta t \quad (1.36)$$

$$\left[\frac{du_{zi}}{dt} \right]_t = \left[\frac{du_{zi}}{dt} \right]_{t-\Delta t} + \left[\frac{du_{zi}}{dt} \right]_t \Delta t \quad (1.37)$$

$$\left[\frac{d\phi_{xi}}{dt} \right]_t = \left[\frac{d\phi_{xi}}{dt} \right]_{t-\Delta t} + \left[\frac{d\phi_{xi}}{dt} \right]_t \Delta t \quad (1.38)$$

$$\left[\frac{d\phi_{yi}}{dt} \right]_t = \left[\frac{d\phi_{yi}}{dt} \right]_{t-\Delta t} + \left[\frac{d\phi_{yi}}{dt} \right]_t \Delta t \quad (1.39)$$

$$\left[\frac{d\phi_{zi}}{dt} \right]_t = \left[\frac{d\phi_{zi}}{dt} \right]_{t-\Delta t} + \left[\frac{d\phi_{zi}}{dt} \right]_t \Delta t \quad (1.40)$$

これより、変位増分 Δu 、 $\Delta \phi$ は上式をさらに Δt に関して積分することにより求められる。

$$[\Delta u_{xi}] = \frac{1}{2} \left([\Delta u_{xi}]_{t-\Delta t} + \left[\frac{du_{xi}}{dt} \right]_t \Delta t \right) \quad (1.41)$$

$$[\Delta u_{yi}] = \frac{1}{2} \left([\Delta u_{yi}]_{t-\Delta t} + \left[\frac{du_{yi}}{dt} \right]_t \Delta t \right) \quad (1.42)$$

$$[\Delta u_{zi}] = \frac{1}{2} \left([\Delta u_{zi}]_{t-\Delta t} + \left[\frac{du_{zi}}{dt} \right]_t \Delta t \right) \quad (1.43)$$

$$[\Delta \phi_{xi}] = \frac{1}{2} \left([\Delta \phi_{xi}]_{t-\Delta t} + \left[\frac{d\phi_{xi}}{dt} \right]_t \Delta t \right) \quad (1.44)$$

$$[\Delta \phi_{yi}] = \frac{1}{2} \left([\Delta \phi_{yi}]_{t-\Delta t} + \left[\frac{d\phi_{yi}}{dt} \right]_t \Delta t \right) \quad (1.45)$$

$$[\Delta \phi_{zi}] = \frac{1}{2} \left([\Delta \phi_{zi}]_{t-\Delta t} + \left[\frac{d\phi_{zi}}{dt} \right]_t \Delta t \right) \quad (1.46)$$

上式によって求めた変位増分 Δu 、 $\Delta \phi$ を時刻 t から $t+\Delta t$ 間での新たな変位増分とし、同様の演算を繰り返し進めていくことで時間を進行していく。

1.4.2 材料定数の設定

法線方向の弾性定数 K_n は, Hertz の弾性接触論⁴⁹⁾から粒子及び壁のヤング率 E , ポアソン比 ν を用いて次式で与えられる. 添字 i, j は粒子を, w は容器の壁面を表している.

$$K_{nij} = \frac{4}{3\pi} \left(\frac{1}{\delta_i + \delta_j} \right) \sqrt{\frac{r_i r_j}{r_i + r_j}} \quad (1.47)$$

$$K_{niw} = \frac{4}{3\pi} \left(\frac{1}{\delta_i + \delta_j} \right) \sqrt{r_i} \quad (1.48)$$

$$\delta_i = \frac{1 - \nu_i^2}{E_i \pi} \quad (1.49)$$

$$\delta_j = \frac{1 - \nu_j^2}{E_j \pi} \quad (1.50)$$

$$\delta_w = \frac{1 - \nu_w^2}{E_w \pi} \quad (1.51)$$

接線方向の弾性定数 K_s は物質のせん断率とヤング率の関係を表すラーメの定数⁵⁰⁾に基づく定義式から **Eq.(1.52)** を用いて求められる.

$$K_{sij} = \frac{K_{nij}}{2(1 + \nu_i)} \quad (1.52)$$

また, 弾性スプリングと粘性ダッシュポットを有する一自由度の振動方程式において, もっとも減衰が早いのは反発を考慮しない場合であり⁵¹⁾, η_{ij} は次式で与えられる.

$$\eta_{ij} = 2\sqrt{m_{Bi} \cdot K_{nij}} \quad (1.53)$$

また, 本シミュレーションでは解の収束性と安定性を得るための条件として **Eq.(1.54)** を考慮し, 時間増分 Δt を決定した.

$$\Delta t < \frac{2}{5} \sqrt{\frac{m_{Bi}}{K_{ij}}} \quad (1.54)$$

1.5 本論文の目的

本論文の目的は粉体混合メカニズムを明らかにし、装置選定や設計技術を確立することで、高速粉体混合装置で生じた有機物と無機物の混合不良を改善することである。この問題を解決するには、DEM シミュレーションを活用し混合メカニズムを把握する必要がある。そのためには、DEM シミュレーションの技術を確立しなくてはならないが、最初から高速粉体混合装置のような複雑な形状を対象とすることは難しいことが予想される。また、実際に使用されている原料をシミュレーションで取り扱うと粒子数が膨大となり現実的な時間内で結果が得られないことから実現象をモデル化する必要がある。

そこで、まずは形状がシンプルな回転ドラムを対象として 4 つの検討を実施した。まず 1 つ目は、粉体特性が混合に及ぼす影響を把握し、混合メカニズムを明らかにすることである。粉体特性としては粒子密度、粒子径分布、摩擦係数、粒子形状を対象とする。実験からでは得ることが難しい種々の情報をシミュレーションから取得し混合メカニズムを解析する。そのためには、DEM シミュレーションの妥当性を保証する必要があるため、実験とシミュレーションの比較も実施する。2 つ目は、湿式混合への適用可能な解析技術の構築である。乾式の粉体混合に対し湿式の粉体混合はあまり研究が進められていないため、解析技術も十分に開発されていない。そこで、液架橋力を考慮した流体と粉体を双方向に連成させた解析技術の基礎検討という位置づけで、液体が介在する 2 粒子間の衝突挙動を再現することを試みた。3 つ目は、実際の工業プロセスでは複数の粉体特性が同時に混合に作用するため、対象とする混合機に対し相性の良い粉体特性の探索方法を提案する。さらに、これらの要因の影響度の大小関係についても評価する。最後に以上 3 つの検討結果から得られた知見に基づき、DEM シミュレーションを用い高速粉体混合装置で生じた混合不良を改善するため設計技術を確立する。

1.6 本論文の構成

本論文は 7 章から構成される。

第 1 章は序論であり、粉体混合に関する本研究の背景を述べ、過去の実験、

理論，シミュレーションに関する先行研究を調査し，本論文の目的を述べた．

第 2 章では，回転ドラムを対象に粉体特性，ここでは摩擦係数，粒子径分布，粒子密度が混合に及ぼす影響について検討した．実験との比較から DEM シミュレーションの妥当性を確認し，DEM シミュレーションを用いて粉体特性のみの影響を調べた．DEM シミュレーションから得られた粒子の混合挙動や混合状態，粒子の軌跡について解析し，各粉体特性が混合に及ぼす影響を明らかにした．

第 3 章では，第 2 章と同様に回転ドラムを対象とした粒子形状が混合に及ぼす影響について検討した．ここでは，まず DEM シミュレーションに必要となるパラメータの選定方法について検討した．その結果，DEM シミュレーションによって非球形粒子の混合挙動を良好に再現できることを示し，粒子形状が混合に及ぼす影響を明らかにした．

第 4 章では，粒子間相互作用の一つである液架橋力が混合に及ぼす影響を解析するため，液体存在下の 2 粒子間の衝突挙動を再現すべく数値解析モデルの構築とその妥当性について検証した．流体-粉体双方向連成解析に加え，粒子への濡れ性を考慮する解析モデルを開発しその妥当性について検証した．2 粒子間の衝突のような短時間で生じる動的な現象を捉えるためには，シミュレーション手法のさらなる改良が必要であることを示した．

第 5 章では，前章までに別個に切り分けられた粒子形状，液架橋力を除く粉体特性および操作条件が複合的に混合に作用する実際の生産プロセスを想定し，回転ドラムに対して相性のよい粉体特性を探索するとともに，これら粉体特性の影響度の大小関係について評価した．探索には任意に粉体特性を変更可能な DEM シミュレーションに加え，品質工学の手法であるタグチメソッドを用いた．検討の結果，粉体特性と操作条件の影響度を明確にし，混合状態が均一になる条件を見出した．さらに DEM シミュレーションとタグチメソッドを併用する本手法が，装置選定手法として有効であることを示した．

第 6 章では，高速粉体混合装置において生じた有機物と無機物の混合不良を改善するため混合装置の設計技術について検討した．まず，DEM シミュレーション上で装置形状の最適化を実施するため，3 Dimensional Computer Aided Design (3DCAD) で作成された形状データを反映可能な DEM シミュレーションプログラムに改良した．回転ドラムを対象にプログラムの妥当性を評価するとともに，

設計の流れについても検討した．これらの確認がとれた上で，高速粉体混合装置を対象とした装置の最適設計を実施した．設計前の装置構造では混合状態が不均一になる原料について，DEM シミュレーション上で装置構造を変更し混合状態を改善する設計指針を得た．設計した装置を実際に製作し検証した結果，DEM シミュレーションと同様に混合状態が改善されることを確認した．

第 7 章は各章で得られた結果をまとめ，結論とした．

Nomenclature

b	Radius of contact surface between two particles	[m]
D_m	Diameter of rotating drum	[m]
d	Viscous drag force	[N]
E	Young's modulus	[Pa]
e	Elastic drag force	[N]
F	Resultant force of ball	[N]
f	Contact force of ball	[N]
g	Gravitational acceleration	[m/s ²]
I	Moment of inertia of particle	[kg·m ²]
K	Elastic coefficient	[N/m]
M	Moment	[N·m]
m	Mass of ball	[kg]
N_c	Critical rotational speed	[rpm]
R_r	Rolling resistance	[-]
r	Radius of ball	[m]
t	Time	[s]
u	Displacement of ball	[m]
α	Angle defined at Fig.1.6	[rad]
β	Angle defined at Fig.1.6	[rad]
η	Viscosity coefficient	[N·s/m]
φ	Rotational displacement	[rad]
μ	Frictional coefficient	[-]
ν	Poisson's ratio	[-]
ρ	Density	[kg/m ³]

参考文献

- 1) Soc. Powder Technol., Japan : “Funtaikougaku binran, 2nd Edition”, Nikkan Kogyo (1998)
- 2) 久保輝一郎, 水渡英二, 中川有三, 早川宗八郎 共編: 粉体 理論と応用, 丸善 (1962)
- 3) M. Satoh, T. Yamashita, T. Yoshida, S. Hasegawa and K. Miyanami : ”An Evaluation of the Mixers Using Adhesive Fine Powders”, 粉体工学会誌, **30**, 390-396 (1993)
- 4) 日本粉体工業技術協会: 粉体入門セミナーⅢ「粉をあやつる」, 粉体入門セミナーテキスト (2010)
- 5) J. Bridgwater : ”Mixing of powders and granular materials by mechanical means-A perspective”, *Particuology*, **10**, 397-427 (2012)
- 6) C. C. Liao, S. S. Hsiao and H. C. Nien : ”Effects of density ration, rotation speed, and fill level on density-induced granular streak segregation in a rotating drum”, *Powder Technology*, **284**, 514-520 (2015)
- 7) P. W. Cleary and M. D. Sinnott : ”Assessing mixing characteristics of article-mixing and granulation devices”, *Particuology*, 6(6), 419–444 (2008)
- 8) M. Sakai, Y. Shigeto, G. Basinskas, A. Hosokawa and M. Fuji : ”Descrite element simulation for the evaluation of solid mixing in an industrial blender”, *Chemical Engineering Journal*, **279**, 821-839 (2015)
- 9) O. Scheibelhofer, N. Balak, D. M. Koller, J. G. Khinast : ”Spatially resolved monitoring of powder mixing processes via multiple NIR-probes”, *Powder Technology*, **243**, 161-170 (2013)
- 10) S. Siiria and J. Yliruusi : ”Determining a value for mixing : Mixing degree”, *Powder Technology*, **196**, 309-317 (2009)
- 11) R. Gosselin, C. Duchesne and D. Rodrigue : ”On the characterization of polymer powders mixing dynamics by texture analysis”, *Powder Technology*, **183**, 177-188 (2008)
- 12) M. Satoh, Y. Deguchi, S. Komura and K. Miyanami : ”The Development of a Continuous Measuring System for the Degree of Mixing of Powders by an Optical

- Method”, 粉体工学会誌, **22**, 79-84 (1985)
- 13) N. Nityanand, B. Manley and H. Henein : ” An analysis of radial segregation for different sized spherical solids in rotary cylinders”, *Metallurgical Transactions B*, **17**, 247-257 (1986).
 - 14) D. V. Khakhar and S. K. Hajra : ”Radial segregation of ternary granular mixtures in rotating cylinders” *Granular Matter*, **13**, 475-486 (1997).
 - 15) G. H. Ristow : ”Particle Mass Segregation in a Two-Dimensional Rotating Drum”, *Europhysics Letters*, **28**(2), 97-101 (1994)
 - 16) A. A. Aissa, C. Duchesne and D. Rodrigue : ”Effect of friction coefficient and density on mixing particles in the rolling regime”, *Powder Technology*, **212**, 340-347 (2011)
 - 17) K. Terashita, H. Ohmura and K. Miyanami : ”Effects of Internal Friction Coefficient on Performance of Various Solid Mixers”, 材料, **31**, 883-887 (1982)
 - 18) O. Dube, E. Alizadeh, J. Chaouki and F. Bertrand : ”Dynamics of non-spherical particles in a rotating drum”, *Chemical Engineering Science*, **101**, 486-502 (2013).
 - 19) A. Santomaso, M. Olivi and P. Canu : ”Mechanisms of mixing of granular materials in drum mixers”, *Chemical Engineering Science*, **101**, 486-502 (2013).
 - 20) H. Henein, J.K. Brimacombe and A. P. Watkinson : ”Experimental study of transverse bed motion in rotary kilns”, *Metallurgical Transactions B*, **14B**, 191-205 (1983).
 - 21) L. Pernenkil and C. L. Cooney : ”A review on the continuous blending of powders”, *Chemical Engineering Science*, **61**, 720-742 (2006)
 - 22) H. P. Kuo, P. C. Knight, D. J. Parker, Y. Tsuji, M. J. Adams and J. P. K. Seville : ”The influence of DEM simulation parameters on the particle behavior in a V-mixer”, *Chemical Engineering Science*, **57**, 3621-3638 (2002)
 - 23) M. Lemieux, F. Bertrand, J. Chaouki and P. Gosselin : ”Comparative study of the mixing of free-flowing particles in a V-blender and a bin-blender”, *Chemical Engineering Science*, **62**, 1783-1802 (2007)
 - 24) Y. Kaneko, T. Shiojima and M. Horio : ”Numerical analysis of particle mixing characteristics in a single helical ribbon agitator using DEM simulation”, *Powder*

- Technology*, **108**, 55-64 (2000)
- 25) K. Sakakura, T. Shiojima and S. Yamamoto : "Numerical Simulation of Double Helical Ribbon Agitators Using Tree-Dimensional DEM Simulation", 日本機械学会論文集(B 編), **71**, 22-28 (2005)
 - 26) A. Hassanpour, H. Tan, A. Bayly, P. Gopalkrishnan, B. Ng and M. hadiri : "Analysis of particle motion in a paddle mixer using Discrete Element Method (DEM)", *Powder Technology*, **206**, 189-194 (2011)
 - 27) H. Nakamura, H. Fujii and S. Watano : "Scale-up of high shear mixer-granulator based on discrete element analysis", *Powder Technology*, **236**, 149-156 (2013)
 - 28) 大村平 : シミュレーションのはなし 転ばぬ先の杖, 日科技連 (2005)
 - 29) 戦略的基盤ソフトウェア産業応用推進協議会 編 : 21 世紀の産業革命 コンピュータ・シミュレーション, アドバンスソフト (2005)
 - 30) 栗山好夫, 笹川宏之 : 初心者のための CAE による機会強度設計, 山海堂 (2006)
 - 31) B. H. Ng, Y. L. Ding and M. Ghadiri : "Modeling of dense and complex granular flow in high shear mixer granulator-A CFD approach", *Chemical Engineering Science*, **64**, 3622-3632 (2009)
 - 32) Y. Zhao, Y. Ding, C. Wu and Y. Cheng : "Numerical simulation of hydrodynamics in downers using a CFD-DEM coupled approach", *Powder Technology*, **199**, 2-12 (2010)
 - 33) A. Shimosaka, K. Hayashi, Y. Shirakawa and J. Hidaka : "Estimation of stress distribution developed in powder bed during compaction by FEM considering anisotropic parameters", *Kagaku Kogaku Ronbunshu*, **26**, 23-30 (2000)
 - 34) S. Srivastava, K. Yazdchi and S. Luding : "Mesoscale dynamics coupling of finite- and discrete-element methods or fluid-particle interactions", *Philosophical Transactions of the Royal Society*, A372, 1-18 (2013)
 - 35) N. Katsura, T. Mitsuoka, A. Shimosaka, Y. Shirakawa and J. Hidaka : "Development of new simulation method for flow behavior of granular materials in a blast furnace using cellular automaton", *ISIJ International*, **45**, 1396-1405 (2005)
 - 36) P. A. Cundall and O. D. L. Strack : "A discrete numerical model for granular

- assemblies”, *Geotechnique*, **29**, 47-65 (1979)
- 37) J. Kano, H. Mio and F. Saito : ”Correlation of size reduction rate of inorganic materials with impact energy of balls in planetary ball milling”, *Journal of Chemical Engineering*, **32**, 445-448 (1999)
 - 38) M. Kwapinska, G. Saage and E. Tsotsas : ”Mixing of particles in rotary drums : A comparison of discrete element simulations with experimental results and penetration models for thermal processes”, *Powder Technology*, **161**, 69-78 (2006)
 - 39) Y. Muguruma, T. Tanaka, S. Kawatake and Y. Tsuji : “Numerical simulation of particulate flow with liquid bridge between particles : Simulation of a centrifugal tumbling granulator”, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineering Series B*, **64**, 662-669 (1998)
 - 40) D. Nishiura, A. Shimosaka, Y. Shirakawa and J. Hidaka : ”Hybrid simulation of hindered settling behavior of particles using discrete element method and direct numerical simulation”, *Kagaku Kogaku Ronbunshu*, **32**, 331-340 (2006)
 - 41) S. Remond : ”DEM simulation of small particles clogging in the packing of large beads”, *Physica A*, **389**, 4485-4496 (2010)
 - 42) H. Mio, M. Kadowaki, S. Matsuzaki and K. Kunitomo : “Development of particle flow simulator in charging process of blast furnace by discrete element method”, *Minerals Engineering*, **33**, 27-33 (2012)
 - 43) T. Bhattacharya, S. K. Hajra and J. J. McCarthy : ”A design heuristic for optimizing segregation avoidance practices in horizontal drum mixers”, *Powder Technology*, **253**, 107-115 (2014)
 - 44) S. S. Manickam, R. Shah, J. Tomei, T. L. Bergman and B. haudhuri : ”Investigating mixing in a multi-dimensional rotary mixer : Experiments and simulations”, *Powder Technology*, **201**, 83-92 (2010)
 - 45) A. Sarkar and C. R. Wassgren : ”Simulation of a continuous granular mixer : Effect of operating conditions on flow and mixing”, *Chemical Engineering Science*, **64**, 2672-2682 (2009)
 - 46) P. Y. Liu, R. Y. Yang and A. B. Yu : ”DEM study of the transverse mixing of wet particles in rotating drums”, *Chemical Engineering Science*, **86**, 99-107 (2013)

- 47) S. Ishihara : ”離散要素による粒子破碎のモデリングとシミュレーションに関する研究”, 博士論文 Tohoku University (2013)
- 48) 粉体工学会 : 粉体シミュレーション入門, 産業図書 (1998)
- 49) S. P. Timoshenko and J. N. Goodier : Theory of Elasticity, McGraw-Hill Book Company (1970)
- 50) 講談社 : はじめての固体力学 ー弾性, 塑性, 粘弾性ー (2010)
- 51) P. A. Cundall : “Formulation of a three-dimensional distinct element model – Part I. A scheme to detect and represent contacts in a system composed of many polyhedral blocks”, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, **25**, 107-116 (1988)